5. Cuadrivectori

Prin analogie cu vectorii spaţiului 3 – dimensional vom construi în spaţiul Minkpwski vectori cu patru componente numiţi 4 – vectori sau cuadrivectori. Păstrând analogia, vom cere ca mărimea lor să rămână neschimbată la rotaţia axelor de coordonate, respectiv la transformările lui Lorentz.

Un prim exemplu de cuadrivector ar putea fi cuadriraza vectoare care are drept componente coordonatele unui eveniment (ct,x,y,z). Este cazul să considerăm două tipuri de componente:

- contravariante $x^i (i=0,1,2,3): x^0 = ct,\ x' = x,\ x^2 = y,\ x^3 = z;$
- covariante $x^i (i=0,1,2,3): x_0 = x^0 = ct,\ x_1 = -x^1 = -x,\ x_2 = -x^2 = -y,$ şi $x^3 = -x^3 = -z.$

Modulul pătrat al cuadrivitezei vectoare va avea expresia unui produs scalar:

$$x^i x_i = x_i x^i = x^0 x_0 + x^1 x_1 + x^2 x_2 + x^3 x_3 =$$
$$(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2.$$

Această cantitate este un invariant relativist (este intervalul dintre evenimentul situat în originea axelor şi evenimentul de coordonate (ct,x,y,z). Ea este neafectată de rotaţia axelor de coordonate.

În mod asemănător putem construi şi alţi cuadrivectori.

Definiţie: În general prin cuadrivector vom înţelege un ansamblu de patru cantităţi $A^i(A^0, A^1, A^2, A^3)$ care se transformă la fel ca şi componentele cuadrirazei vectoare x^i la o transformare a sistemului de referinţă inerţial:

$$A^0 = \frac{A'^0 + \frac{V}{C} A'^1}{\sqrt{1 - V^2/C^2}}, A^1 = \frac{A'^1 + \frac{V}{C} A'^0}{\sqrt{1 - V^2/C^2}}, A^2 = A'^2, A^3 = A'^3$$

Componentele covariante A_i ale cuadrivectorului sunt:

$$A_0 = A^0, A_1 = -A^1, A_2 = -A^2 \text{ şi } A_3 = \text{-}A^3.$$

Modulul pătrat al cuadrivectorului este:

$$A^i A_i = A_i A^i = A^0 A_0 + A^1 A_1 + A^2 A_2 + A^3 A_3 = (A^0)^2 - (A')^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2$$

Componenta A^0 a unui cuadrivector se numeşte temporală în componentele A,A,A se numesc spaţiale. Componentele spaţiale pot defini un vector tridimensional:

$\vec{A} = A^1 \vec{e} + A^2 \vec{j} + A^3 \vec{k},$ astfel încât cuadrivectorul se poate nota:

$$A^i = (A^0, A^1, A^2, A^3) = (A^0, \vec{A}) \text{ sau}$$
$$A = (A_0, A_1, A_2, A_3) = (A_0, \text{-}\vec{A}) = (A^0, \text{-}\vec{A})$$

iar modulul său pătrat se pune sub forma:

$$A^i A_i = (A^0)^2 - \vec{A}^2.$$

Dacă $A^i A_i > 0$ cuadrivectorul este de gen (tip) temporal, dacă $A^i A_i < 0$ cuadrivectorul este de gen (tip) spaţial iar când $A^i A_i = 0$ avem un cuadrivector nul sau izotop.

6. Cuadriviteza şi cuadriacceleraţia

Prin analogie cu viteza tridimensională: $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ putem construi cuadriviteza $u^i = \frac{dx^i}{ds}$ unei particule:

Deoarece dt nu este un invariant relativist se poate utiliza timpul propriu $d\tau$ definit de relaţia:

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2d\tau^2.$$

Aşa cum se observă cdt=ds sau $d\tau = \frac{1}{c}ds$ astfel încât avem un invariant relativist în definiţia cuadrivitezei. Componentele cuadrivitezei se calculează astfel:

$u^0 = \frac{dx^0}{ds} = \frac{d(ct)}{cd\tau} = \frac{dt}{d\tau} = \frac{dt}{dt\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ unde v este viteza particulei în spaţiul cu trei dimensiuni.

$$u = \frac{dx'}{ds} = \frac{dx}{cd\tau} = \frac{dx}{cdt\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{v_x}{c\sqrt{1-v^2/c^2}} \text{etc}$$ astfel încât:

$$u^i = \left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \frac{\vec{v}}{c\sqrt{1-v^2/c^2}}\right).$$

Modulul pătrat al cuantivitezei este:

$$u^iu_i = \frac{dx^i}{ds}\cdot\frac{dx_i}{ds} = \frac{dx^idx_i}{ds^2} = \frac{ds^2}{ds^2} = 1.$$

Cuadriviteza este un cuadrivector de modul unitate tangent la linia de univers a particulei.

Cuadriacceleraţia este definită $w^i = \frac{d^2x^i}{ds^2} = \frac{du_i}{ds}$. Derivând $u^iu_1 = 1$ se obţine $u_iw^i = 0$ ceea ce înseamnă că 4 – acceleraţia şi 4 viteza sunt ortogonale.

7. Principiul minimei acţiuni în mecanica relativistă

Principiul minimei acţiuni afirmă că prin orice sistem mecanic există o integrală S numită acţiune care este minimă (externă) pentru mişcarea reală şi a cărei variaţie este, deci, nulă. Vom construi acţiunea pentru o particulă relativistă liberă (nesupusă unor forţe exterioare). Considerând că acţiunea nu trebuie să depindă de sistemul de referinţă şi că sub semnul integrală trebuie să fie o diferenţă de ordinul întâi rezultă că acţiunea pentru o particulă liberă va avea forma:

$S = -\alpha\int_a^b ds$ unde α este o constantă pozitivă semnul minus asigură posibilitatea ca acţiunea să fie minimă iar integrala se ia pe linia de univers a particulei între evenimentele date a şi b.

Putem apoi deduce funcţia Lagrange a particulei relativiste libere:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} Ldt = -\alpha\int_a^b ds = -\alpha\int_{\tau_1}^{\tau_2} cd\tau = -\alpha\int_{t_1}^{t_2} cdt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L = -\alpha c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

La linia nerelativistă $\left(\frac{v}{c} \to 0\right)$ dezvoltăm L în serie de puteri ale lui $\frac{v}{c}$ şi păstrăm primii termeni :

$$L = -\alpha c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \cong -\alpha c + \frac{\alpha v^2}{2c}$$

Eliminăm constanta - $-\alpha c$ în acord cu proprietatea 3 a funcţiei Lagrange şi egalăm cu expresia clasică:

$$L \approx \frac{\alpha v^2}{2c} = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow \alpha = mc.$$

obţinem în final:

$$L = -mv^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \text{ şi } S = -mc\int_a^b ds.$$

8. Cuadriimpulsul

Impulsul relativist tridimensional se calculează conform definiţiei: $\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}}$.

Componenta k este:

$$p_k = \frac{\partial}{\partial v_k}\left[-mc^2\sqrt{1-\frac{v_i v_i}{c^2}}\right] \text{ unde } v_i v_i = v_x v_x + v_y v_y + v_z v_z = v^2.$$

$$p_k = -mc^2 \frac{1}{2}\frac{\frac{-2}{c^2}v_i\delta_{ik}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{v_1 v_k}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

Derivând la timp impulsul 3 – dimensional se obţine forţa:

- în cazul în care se modifică doar mărimea vitezei:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{m}{\sqrt{\left(1-v^2/c^2\right)}}\frac{d\vec{v}}{dt}$$

- în cazul în care se modifică doar direcţia vitezei $\left(\vec{F} \perp \vec{v}\right)$:
-

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{m}{\sqrt{(1-v^2/c^2)}}\frac{d\vec{v}}{dt}.$$

În cele două cazuri raportul dintre forţă şi acceleraţie este diferit. Energia particulei se calculează astfel:

$$E = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i - L\,.$$

In cazul particulei libere relativiste expresia de mai sus în coordonate carteziene devine:

$$E = \vec{p}\vec{v} - L = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow$$

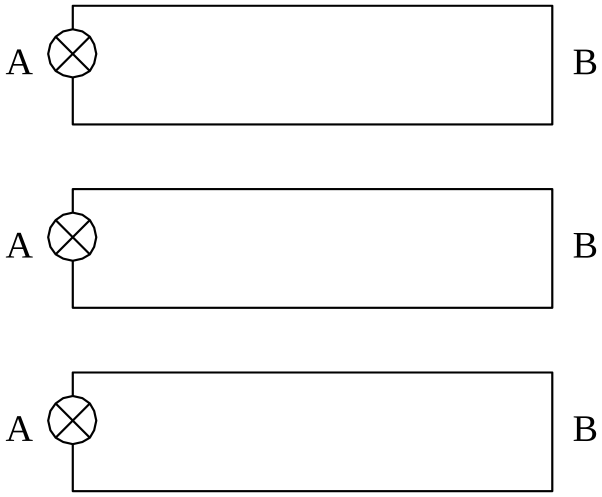
$$\Rightarrow E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

Observăm că dacă particula este în repaus ea posedă energia de repaus:

$$E_0 = mc^2 \text{ şi } \vec{p} = \frac{E\vec{v}}{\vec{c}}$$

$E = E_0\gamma = E_p + T \Rightarrow E_0(\gamma - 1)$ - energia cinetică relativistă. Dacă un pozitron (antiparticula electronului e^+ - are aceleaşi proprietăţi, mai puţin sarcina care este pozitivă) se întâlneşte cu un electron la o viteză relativă mică, amândoi dispar într-un flash radiaţie electromagnetică. Se emit cel puţin doi fotoni (pentru conservarea impulsului) a căror energie a fost măsurată = $2m_0c^2$. Energia de repaus a substanţei s-a transformat în energie

a radiaţiei electromagnetice. Un alt exemplu este oferit de celebra cutie a lui Einstein. Cutia conţine un bec la un capăt al ei şi un perete absorbant la celălalt. Ea este în absenţa câmpurilor gravitaţionale şi a oricăror interacţiuni din exterior. Dacă becul emite un flash luminos, trenul de unde călătoreşte prin cutie şi este absorbit la celălalt capăt. Teoria electromagnetismului a lui Maxwell va spune că flash-ul luminos transportă energia E şi impulsul E/C. Astfel când el părăseşte becul, cutia suferă un recul pentru conservarea impulsului:



$$M_v = \frac{E}{C}.$$

După timpul $t = \frac{L}{C}$ lumina este absorbită în celălalt capăt. În acest interval de timp cutia parcurge distanţa : $d = vt = \frac{E}{M_c} \cdot \frac{L}{C} = \frac{EL}{mc^2}$. Astfel, deşi nu avem forţe externe centrul de masă al sistemului s-a mişcat. Explicaţia constă în faptul că nu am considerat faptul că traseul de unde cu energia E posedă şi (m) pe lungimea L a tubului astfel încât:

$$Md = m\ L,$$

pentru păstrarea echilibrului. De aici aflăm masa transportată de lumină: $m = \frac{Md}{2} = \frac{E}{C^2}$ în acord cu relaţia lui Einstain. Fotonii au masa de mişcare $\frac{E}{C^2}$ şi impulsul $\frac{E}{C}$ dar nu au masă de repaus $m_0 = 0$, ei fiind tot timpul în mişcare cu viteza c faţă de orice observator.

O ultimă observaţie se referă la relaţia dintre masă şi energie. Astfel să considerăm un atom de hidrogen în repaus. El este alcătuit dintr-un proton şi un electron ţinuţi împreună de forţa electrostatică. Pentru a descompune acest sistem este necesar un foton cu energia de 13,6 eV care ionizează atomul, adică separă electronul de proton la o distanţă suficient de mare pentru ca atracţia lor electrostatică să înceteze. Masa atomului de hidrogen este cu 13,6 eV/c^2 mai mică decât suma maselor electronului şi protonului izolat.

În cazul nucleelor, forţele dintre nucleoni sunt mult mai puternice. Astfel când un atom de hidrogen se combină cu unul de litiu pentru a forma doi atomi de heliu defectul de masă este mult mai mare. Energia emisă este de 17 MeV, de cel puţin un milion de ori mai mare decât cea emisă în cele mai evidente relaţii chimice. La explozia unui milion de tone de TNT modificarea de masă este de câteva sute de grame în timp ce la explozia unei bombe de hidrogen având aceeaşi masă defectul de masă este de aproximativ 50kg.. Putem afirma că energia unui corp în repaus conţine pe de o parte energia de repaus a particulelor componente, energia cinetică a acestora şi energia de interacţiune.

Impulsul clasic este important deoarece se consumă în sisteme izolate. Vom introduce noţiunea de cuadriimpuls şi vom căuta invarianţi Lorentz care să implice această mărime.

Definim cuadriimpulsul: $p^i = mcu^i (i = 0,1,2,3)$ pentru componentele contravariante şi $p^i = mcu_i$ pentru cele covariante. Produsul scalar este:

$$p^i p_i = m^2c^2u^iu_i = m^2c^2$$

Componentele sunt:

$p^0 = mcu^0 = \frac{mc}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{E}{C}$ (componenta temporală) şi

$p^1 = mcu^1 = \frac{mcv_x}{c\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{mv_x}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = p_x$ etc. a.î. $\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$.

Deci $p^i = \left[\frac{E}{C}, \vec{p}\right]$ şi $p_i = \left(\frac{E}{C}, -\vec{p}\right)$ şi modulul pătrat va fi:

$p^i p_i = \frac{E^2}{C^2} - \vec{p}^2 = m^2c^2 \Rightarrow E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$: relaţia relativistă între energie şi impuls. Expresia $\frac{E^2}{C^2} - \vec{p}^2 = m^2c^2$ este invariantul fundamental al dinamicii teoretice relativităţii restrânse (scalar). Transformarea componentelor 4 – impulsului la schimbarea de referenţial se face în acord cu definiţia:

$$E = \frac{E' + Vp_{x'}}{\sqrt{1-v^2/c^2}},\ p_x = \frac{p'_x + \frac{v}{c^2}E'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, p_y = p'_y,\ p_z = p'_z.$$

În cazul fotonilor, ecuaţiile Planck-Einstein $E = h\gamma$ şi $p = \frac{E}{C}$ aplicate relaţiei de transformare a energiei conduc la:

$$\nu = \nu^2 \frac{1 + \frac{V}{C}\cos\theta^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

unde θ' este unghiul format în sistemul de referinţă în mişcare de impulsul fotonului cu axa Ox'.

Când $\theta' = \theta^0, \nu = \nu' \sqrt{\frac{1+\frac{V}{C}}{1-\frac{V}{C}}}$ (efectul Doppler longitudinal) şi când $\theta' = 90^0, \nu = \frac{\nu'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ (efectul Dappler transversal).

Efectul Doppler a permis prin măsurarea (deplasării spre roşu) a ….. fotonilor proveniţi din galerii îndepărtate, să se deducă faptul că acestea şe îndepărtează de noi cu o viteză care creşte cu îndepărtarea şi deci, să se afirme că ne aflăm într-un univers în expansiune.

Vom arăta acum că 4- impulsul unui sistem izolat se conservă. Principiul minimei acţiuni afirmă că pentru mişcarea efectivă acţiunea este extremă. Matematic acesta se exprimă prin:

$$\delta S = 0$$

unde $S = -mc\int_a^b ds$ este acţiunea particulei libere. Exprimând $ds^2 = dx^i dx_i$, avem:

$$\delta S = -mc\delta\int_a^b ds = -mc\delta\int_a^b \sum dx^i dx_i = -mc\int_a^b \frac{dx_i \delta dx^i}{ds} = -mc\int_a^b u^i d\delta x^i$$

Integrând prin părţi:

$$\delta S = -mc\int_a^b u^i d\delta x^i = -mc\int_a^b \left[d(u_i\delta x^i) - \delta x^i du_i\right] = u^2 d\delta x^i = d(u_i\delta x^i) - \delta x^i du_i =$$

$$= -mc\left[u_i\delta x^i\right]_a^b + mc\int_a^b \delta x^i \frac{du_i}{ds}\cdot ds \Rightarrow$$

Ţinând cont de condiţiile la limită $\left(\delta x^i\right)_a = \left(\delta x^i\right)_b = 0$ (traiectoriile comparate trec prin acelaşi punct) obţinem:

$\delta S = mc\int \delta x^i \frac{du_i}{ds} ds = 0 \Rightarrow \frac{du_i}{ds} = 0 \rightarrow$ cuadriviteza unei particule libere u^i ;i deci ;i 4 – impulsul $p^i = mcu^i$ sunt constante.